Parne interakcije u plazmi

5

Uvodne napomene

- Plazma – sistem sa velikim brojem čestica: parne interakcije u sistemu sa velikim brojem čestica dolaze do izražaja samo kad se dve čestice nađu na tako malom međusobnom rastojanju da njihovo uzajamno dejstvo znatno utiče na njihovo dalje kretanje.
- Posledica: skretanje obe čestice sa prvobitnog pravca kretanja
- Ovakvi događaji se uopšte zovu *sudari,* tačnije *dvojni (binarni)* sudari, koji mogu biti elastični i neelastični.

Osnovne zakonitosti kod dvojnih elastičnih sudara

- Ugao skretanja (ili rasejana):

$$\theta = \pi - 2\int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{b}{\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{\rho^2} - 2\frac{U(\rho)}{\mu v_r^2}}}$$

b je parametar sudara, v_r relativna brzina koju imaju čestice znatno pre sudara koje se sudaruju, njihova redukovana masa μ, $U(\rho)$ je oblik potencijala, ρ_{min} je rastojanje najvećeg približavanja, koje se dobija rešavanjem jednačine:

$$1 - \frac{b^2}{\rho_{\min}^2} - 2\frac{U(\rho_{\min})}{\mu v_r} = 0$$

Potencijali interakcije

- Potencijali interakcije mogu biti različiti: (a) model krutih sfera, (b) Kulonova interakcija, (c) Nemard-Džons-ov (Lennrad-Jones) potencijal, (d) Morze-ov (Morse) potencijal
- s=2 Kulon-ova inter.
- s=4 inter. dipolnih molek.
- s=6 inter. kvadripolnih molek.
- s=7 Van der Valsove sile
- s=5 Maksvel-ovi molek.
- U plazmi se relani molekuli ponašaju na složeniji način.

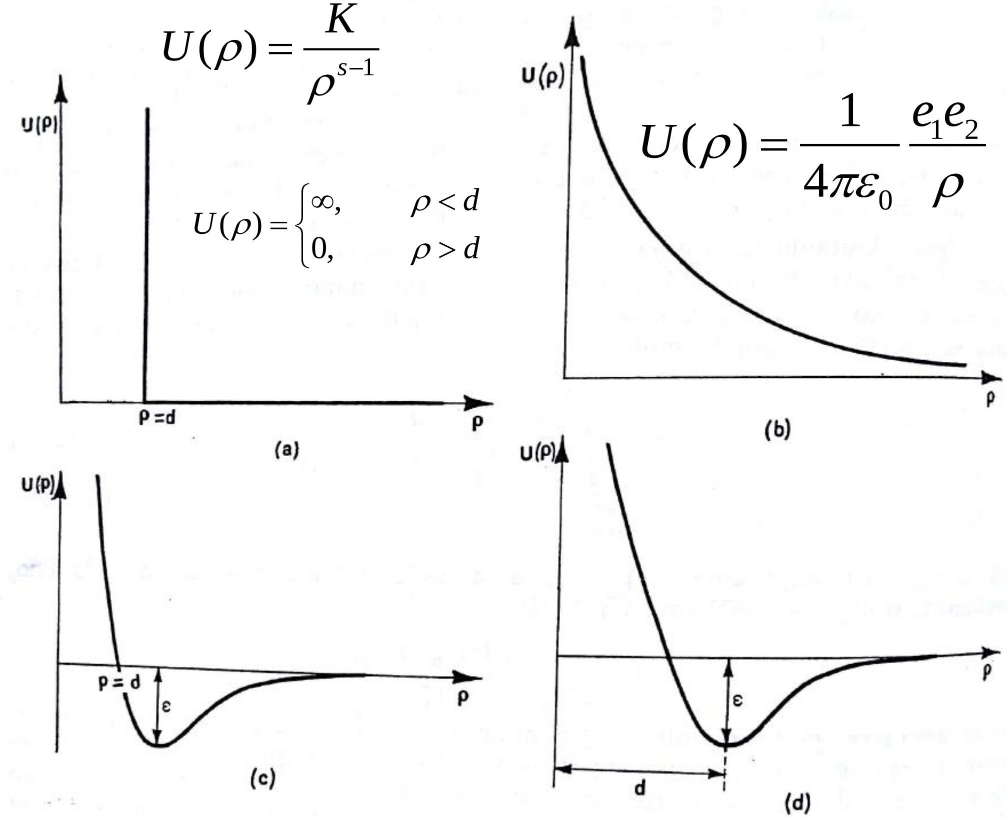
$$U(\rho) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{d}{\rho}\right)^{12} - \left(\frac{d}{\rho}\right)^{6}\right]$$

d je dijametar molek., ε dubina pot. jame.

$$U(\rho) = \frac{K}{\rho^{s-1}}$$

$$U(\rho) = \begin{cases} \infty, & \rho < d \\ 0, & \rho > d \end{cases}$$

$$U(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_1 e_2}{\rho}$$



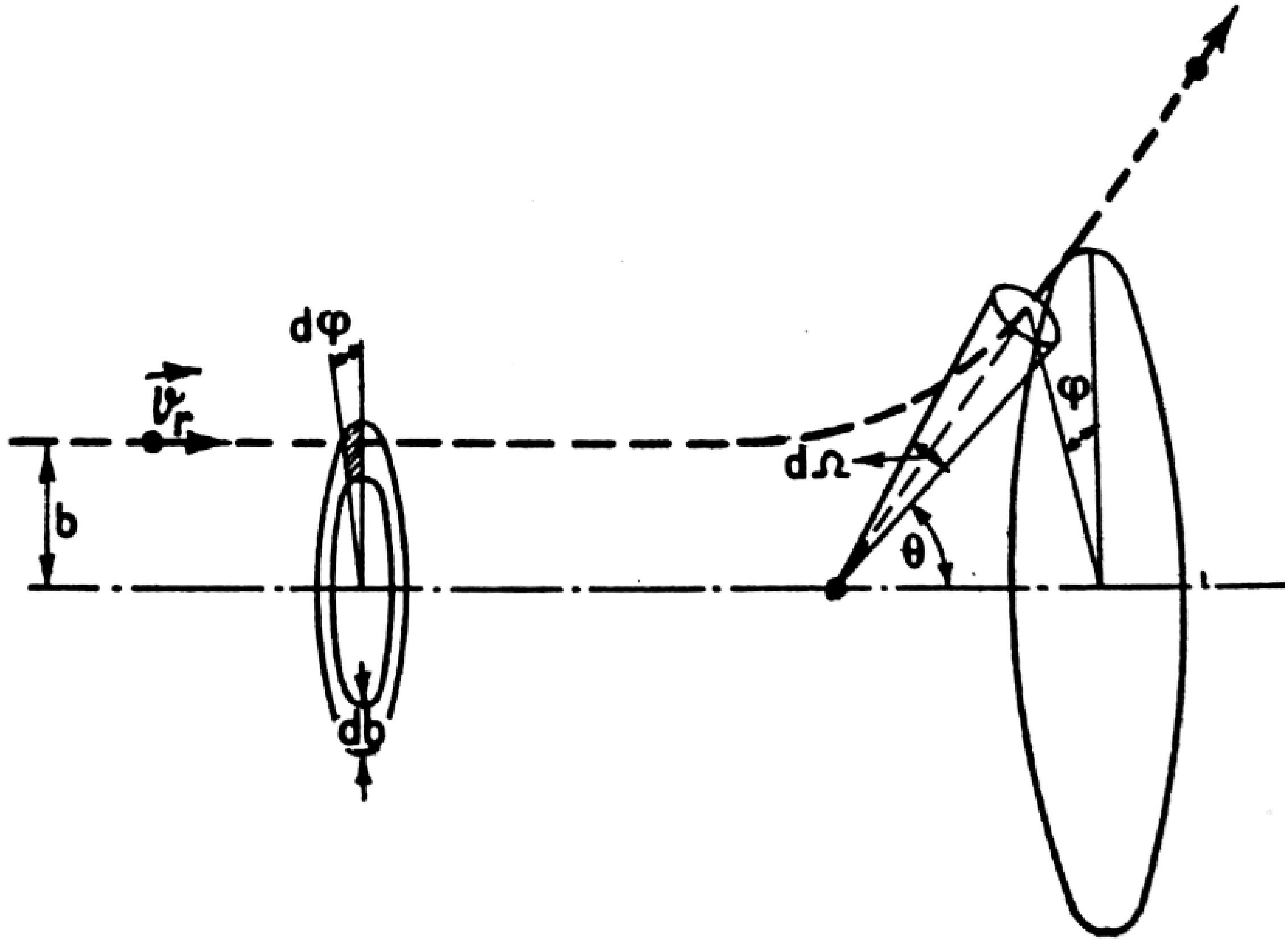
Diferencijalni presek rasejanja

- Kada se za date vrste čestica izabere podesan oblik potencijala interakcije i izračuna ugao skretanja, može naći tzv. *Diferencijalni Presek Rasejanja (DPR):*

$$\sigma(v_r, \theta) = \frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta}$$

pri čemu je potrebno najpre parametar sudara *b* izraziti u funckiji ugla skretanja θ i relativne brzine v_r

- DPR daje verovatnoću da jedna čestica bude rasejana u jedinični prostorni ugao oko pravca određenog uglom θ (videti sliku).



dφ
$\vec{v}_r$
b
db
dΩ
θ
φ

Totalni presek rasejanja

- Totalni Presek Rasejanja (TPR):

$$\sigma^{(0)}(v_r) = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(v_r,\theta)\sin\theta d\theta$$

- Efektivni presek za prenos momenata višeg reda:

$$\sigma^{(n)}(v_r) = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(v_r,\theta)\left[1 - P_n(\cos\theta)\right]\sin\theta d\theta$$

  $P_n(cos\theta)$ - Ležandr-ovi (Legendre) polinomi n-tog reda (n=1,2,3,...)

- Za n = 1 gornja formla daje tzv. Difuzni ili Ramsauer-ov presek, koji se zove jos i presek za prenos momenta. Ovaj presek je od posebnog interesa kod razmatranja sudara među naelektrisanim česticama plazme.

Koliziona frekvencija

- Kad se radi o velikom skupu čestica uvodi se pojam *kolizionih frekvenci*.
- Pod kolizionom frekvencom $\nu_{\alpha\beta}$ podrazumeva se broj sudara koje u jedinici vremena pretrpi jedna čestica vrste α sa česticama vrste β. Ponekada je zgodno na osnovu ove veličine uvesti i totalnu kolizionu frekvencu (TKF), srednje vreme slobodnog kretanja (SVSK) i srednji slobodni put za česticu vrste α. Ove veličine su definisane respektvno relacijama:

$$\nu_\alpha = \sum_\beta \nu_{\alpha\beta},\ \tau_\alpha = \frac{1}{\nu_\alpha},\ \lambda_\alpha = v_{T\alpha}\tau_\alpha = \frac{v_{T\alpha}}{\nu_\alpha}$$

  sumiranje se vrši po svim vrstama čestica, uključujući i $\alpha=\beta$.
- TKF predstavlja ukupan broj sudara koje jedna čestica vrste α pretrpi u jedinici vremena, a SVSK je vreme između dva uzastopna sudara.
- Poneki put se uvode i veličine: $\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{\nu_{\alpha\beta}},\ \lambda_{\alpha\beta} = v_{T\alpha}\tau_{\alpha\beta}$

Veza između kolizione frekvencije i preseka rasejanja

$$\nu_{\alpha\beta}^{(0)} = n_\beta \int \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(v_r)\, v_r\, dP_r^{\alpha\beta} = n_\beta \left\langle \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathrm{v}_r)\, v_r \right\rangle$$

$$\nu_{\alpha\beta}^{(n)} = n_\beta \int \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(v_r)\, v_r\, dP_r^{\alpha\beta} = n_\beta \left\langle \sigma_{\alpha\beta}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{v}_r)\, v_r \right\rangle$$

gde $dP^{\alpha\beta}{}_r$ predstavlja verovatnoću da jedan par čestica, od kojih je jedna vrste α a druga vrste β, ima relativnu brzinu između v_r i v_r+dv_r a <> označava usrednjavanje po toj verovatnoći.

- Ako čestice imaju Maksvel-ovu raspodelu po brzinama i jednake temperature, tada je

$$dP_r^{\alpha\beta} = \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu_{\alpha\beta} v_r^2}{2kT}\right) dv_{rx} dv_{ry} dv_{rz}$$

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + \mu_\beta}$$

Elastični sudari među naelektrisanim česticama

- Najvažniji procesi elastičnog rasejanja kod plazme su oni među naelektrisanim česticama.
- potencijal interakcije je Kulonov:

$$U(\rho) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_\alpha e_\beta}{\rho}$$

$$ctg\,\frac{\theta}{2} = \frac{b}{b_0}; \quad b_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left|e_\alpha e_\beta\right|}{\mu_{\alpha\beta} v_r^2}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(v_r, \theta) = -\frac{1}{4} b_0^2 \frac{1}{\sin^4 \dfrac{\theta}{2}} \text{ Rutherford-ova formula}$$

Fizički smisao veličine b_0

$$b_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|e_\alpha e_\beta|}{\mu_{\alpha\beta} v_r^2}$$

- Pri parametru sudara $b=b_0$ ugao rasejanja je 90^0.
- Pri $b>b_0$ uglovi rasejanja su manji od 90^0 i takve ćemo sudare zvati “slabim”.
- Nasuprot tome, “jaki” sudari su okrakterisani uslovom $b<b_0$
- Dakle, parametar b_0 možemo shvatiti kao granični parametar sudara koji deli “jake” i “slabe” sudare.

$$\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta} v_r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|e_\alpha e_\beta|}{b_0} \right)$$

- b_0 je rastojanje među naelektrisanim česticama koje se sudaraju, na kome je apsolutna vrednost njihove elektrostatičke potencijalne energije dvaput veća od kinetičke energije njihovog relativnog kretanja.

Diferencijalni presek Kulon-ovog rasejanja

- Polazeći od

$$\sigma(v_r,\theta)=\frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta}\qquad\qquad ctg\frac{\theta}{2}=\frac{b}{b_0}$$

dobija se (za domaći: izvesti Raderford-ovu (Rutherford) formulu):

$$\sigma_{\alpha\beta}(v_r,\theta)=-\frac{1}{4}b_0^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

pri čemu indeksima αβ naglašeo je da se razmatra rasejanje čestica vrste α (nelektrisanja e_α mase m_α) na česticama vste β (korespodentne veličine su e_β i m_β) .

- Verovatnoća rasejanja pod malim uglom je vrlo velika, dok je za velike uglove ona mala. Zbog toga se kretanje naelektrisanih čestica u plazmi znatno razlikuje od termalnog kretanja običnih molekula u neutralnom gasu. Dok su trajektorije molekula u običnom gasu izlomljene cik cak linije, trajektorija naelektrisane čestice u plazmi su neprekidne, glatke i blago talasaste linije.

Prevazilaženje problema pri izračunavanju preseka rasejanja u plazmi koji odgovaraju Rutheford-ovoj formuli

$$\sigma_{\alpha\beta}(v_r,\theta) = -\frac{1}{4}b_0^2\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sigma^{(0)}(v_r) = 2\pi\int_0^{\pi}\sigma\left(v_r,\theta\right)\sin\theta d\theta$$

$$\sigma^{(n)}(v_r) = 2\pi\int_0^{\pi}\sigma\left(v_r,\theta\right)\left[1-P_n\left(\cos\theta\right)\right]\sin\theta d\theta$$

Integrali za totalni presek divergiraju na donjoj granici. Ova teskoća se može otkloniti, ukoliko se uzme u obzir da u plazmi postoji elektrostatičko ekraniranje, usled čega je najveći moguć parametar sudara jednak Debye-ovom radijusu čestica koje u datom slučaju služe kao centri rasejanja.

$$b = r_{D\beta} \qquad ctg\frac{\theta_{\min}}{2} = \frac{r_{D\beta}}{b_0} \qquad \theta_{\min} \approx 2\frac{b_0}{r_{D\beta}}$$

Srednji slobodni put $\lambda_{\alpha\beta}$ u plazmi

- Kretanje naelektrisanih čestica u plazmi se znatno razlikuje od termalnog kretanja običnih molekula u neutralnom gasu (ovo sledi iz Rutherd-ove formule: verovatnoca rasejanja pod malim uglom θ je vrlo velika, dok za velike uglove ona je mala).

- Pretpostavimo da se samo uočena čestica vrste α kreće, a sve čestice vrste β miruju i srednji slobodni put $\lambda_{\alpha\beta}$ ćemo shvatiti kao rastojanje koje ta čestica treba da prođe, sudarajući se samo sa česticama vrste β, pa da izgubi svoj prvobitni pravac kretanja.

$$dv = -v\frac{dx}{\lambda_{\alpha\beta}} \qquad dv = -v\left(1-\cos\theta\right)$$

- U sloju debljine x čestica pretrpi $n_\beta 2\pi\sigma_{\alpha\beta}\left(v_r,\theta\right)\sin\theta\, d\theta dx$ sudara sa skretanjem u granicama između θ i $\theta+d\theta$
- Ukupna srednja promena brzine u x pravcu

$$dv = -\int_{\theta_{\min}}^{\pi} v\left(1-\cos\theta\right)n_\beta 2\pi\sigma_{\alpha\beta}\left(v_r,\theta\right)\sin\theta\, d\theta dx$$

$$\lambda_{\alpha\beta} = \left(n_\beta \int_{\theta_{\min}}^{\pi} 2\pi\sigma_{\alpha\beta}\left(v_r,\theta\right)\left(1-\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta\right)^{-1}$$

Izračunavanje Ramsauer-ovog preseka. Kulonovski logaritam

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(v_r) = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_{\alpha\beta}\left(v_r, \theta\right)\left[1-\cos\theta\right]\sin\theta d\theta$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(v_r, \theta) = -\frac{1}{4} b_0^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(v_r) = 4\pi b_0^2 \ln\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta_{\min}}{2}}\right) = 4\pi b_0^2 \ln\left(\frac{r_{D\beta}}{b_0}\right)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(v_r) = 4\pi b_0^2 L_{\alpha\beta}$$

Fizički smisao Kulonovskog logaritma: “slabi” sudari su približno $L_{\alpha\beta}$ puta efikasniji u pogledu zaustavljanja prvobinog kretanja naelktrisane čestice nego li “jaki” sudari.

Analiza veličine $L_{\alpha\beta}$

- Kulonovski logaritam ne samo da je praktično konstantan, već je to obično vrlo veliki broj.
- Njegova numerička vrednost se najčešće kreće između 10 i 20 i može se tačnije naći ako se za kinetičku energiju relativnog kretanja koja se pojavljuje u veličini b_0 stavi srednja energija termalnog kretanja.
- **Za domaći**: polazeći od

$$\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}v_r^2 = \frac{3}{2}kT$$

pokazati da je
$$L_{\alpha\beta} = \ln\left[\frac{12\pi\varepsilon_0}{|e_\alpha|e_\beta^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{n_\beta}}\left(kT\right)^{3/2}\right]$$

Fizički smisao veličine $L_{\alpha\beta}$

$$L_{\alpha\beta} = \ln\left[\frac{12\pi\varepsilon_0}{|e_\alpha| e_\beta^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{n_\beta}}\left(kT\right)^{3/2}\right]$$

- Iz navedenog izraza se vidi da *povećanje koncntracije n_β za red veličine (tj. za oko 10 puta) smanjuje Kulonovski logaritam za 1.15, dok povećanje temperature za red velčine povećava Kulonovski logaritam za 3.45.*
- **za domaći**: Ako se posebno izračuna Ramsojer-ov presek za “slabe” ($\theta<90^0$) i “jake” sudare ($\theta>90^0$) i izračunavanjem integrala posebno od θ_{min} do $\pi/2$ i od $\pi/2$ do π, nalazimo:

$$\left(\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}\right)_{slabi} = 4\pi b_0^2\left(L_{\alpha\beta} - \ln\sqrt{2}\right) \qquad \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}\right)_{jaki} = 4\pi b_0^2 \ln\sqrt{2}$$

- Imajući u vidu da je $\ln(2)^{1/2}=0.34$ a da je Kulonovski logaritam između 10 i 20, možemo zaključiti da su “slabi” sudari približno $L_{\alpha\beta}$ puta efikasniji u pogledu zaustavljanja prvobitnog kretanja naelektrisane čestice nego li “jaki”.

Zašto?

- “Slabi” sudari, sa malim uglovima skretanja i malim promenama impulsa, su neuporedivo verovatniji, češći, nego “jaki” sudari sa veikim uglovima skretanja i velikim pomenama impulsa rasejane čestice.

Izračunavanje kolizionih frekvencija

- U skladu sa jednačinom stavljajuci n=1.

$$\nu_{\alpha\beta}^{(0)} = n_\beta \int \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(v_r) v_r dP_r^{\alpha\beta} = n_\beta \left\langle \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathrm{v}_r) v_r \right\rangle$$

$$\nu_{\alpha\beta}^{(n)} = n_\beta \int \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(v_r) v_r dP_r^{\alpha\beta} = n_\beta \left\langle \sigma_{\alpha\beta}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{v}_r) v_r \right\rangle$$

- Praktične teškoće: ako su funkcije raspodele čestica koje se sudaraju po brzinama Maksvel-ove, gornji integral divergira, zbog faktora $1/v_r^3$ koji se po javljuje u integrandu.
- *Spicer-Harm-ove* formule: frekvencija elektron-elektronskih i elektron-jonskih sudara su približno jednake. Za totalnu kolizionu frekvenciju $\nu_e=\nu_{ee}+\nu_{ei}=2\nu_{ei}$

$$\nu_e = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{m_e}}\left(\frac{e\,e_i}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{n_e}{\left(kT_e\right)^{3/2}} L_{ei} \qquad \nu_i = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{m_i}}\left(\frac{e_i^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{n_i}{\left(kT_i\right)^{3/2}} L_{ii}$$

- Kod jona su bitni samo jon-jonski sudari.

Analiza

- Obe kolizione frekvencije su obrnuto proporcionalne kvadratnom korenu iz kuba koorespodentne temperature čestica, što predstavlja osobenost Kulon-ove interakcije.
- Ako je temperatura čestica viša, njihovo termalno kretanje je brže, a sa povećanjem brzine presek rasejanja opada (opada, dakle, i verovatnoća sudara i broj sudara u jedinici vremena)

Sudari naelektrisanih čestica sa neutralima

- Ovi sudari mogu takođe biti od izvesnog značaja za ponašanje plazme, posebno kod malih stepena jonizacije.
- Najčešće se računaju po modelu krutih sfera, tj. smatrajući da su procesi nezavisni od brzina.
- $$\nu_{\alpha n} \approx n_n \sigma_{\alpha n} v_{T\alpha}$$
- Kod sudara jon-neutral (i-n)obično se može uzeti da je
$$\sigma_{in} \approx 10^{-20}\,\mathrm{m}^2$$
- Međutim u istoj plazmi se, kod *e-n* sudara mora uzeti druga vrednost za σ_{en} i ona može biti i do 100 puta veća od navedene.
- Upoređujući sudare među naelektrisanim česticama i sudare ovih čestica sa neutralima, možemo formulisati *kriterijume slabe i jake jonizacije*.
- Plazma će biti jako jonizovana, ako su u njoj dominantni sudari među naelektrisanim česticama, tj. ako važe uslovi:

$$\nu_e \gg \nu_{en}, \qquad \nu_i \gg \nu_{in}$$